

© International Baccalaureate Organization 2021

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2021

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: aplicaciones e interpretación
Nivel medio
Prueba 2

Martes 2 de noviembre de 2021 (mañana)

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 16]

A un grupo de 1280 alumnos se les preguntó cuál era su dispositivo electrónico preferido. Los resultados, desglosados por grupo de edad, se muestran en la siguiente tabla.

Dispositivo preferido	Edad			Total
	11–13	14–16	17–18	
Computadora portátil	143	160	153	456
Tableta	205	224	131	560
Teléfono móvil	72	128	64	264
Total	420	512	348	1280

- (a) Se elige al azar a un alumno del grupo. Calcule la probabilidad de que el alumno:
- (i) Prefiera una tableta.
 - (ii) Pertenezca al grupo de edad de 11–13 años y prefiera un teléfono móvil.
 - (iii) Prefiera una computadora portátil **sabiendo que** pertenece al grupo de edad de 17–18 años.
 - (iv) Prefiera una tableta o pertenezca al grupo de edad de 14–16 años. [9]

Para determinar si hay independencia, se realizó una prueba (contraste) de χ^2 con los datos obtenidos, a un nivel de significación del 1%. El valor crítico para esta prueba es 13,277.

- (b) Indique la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. [1]
- (c) Escriba el número de grados de libertad. [1]
- (d) (i) Escriba el estadístico de la prueba χ^2 .
- (ii) Escriba el valor del parámetro p .
- (iii) Indique cuál es la conclusión de la prueba en el contexto de la pregunta. Dé una razón que justifique su respuesta. [5]

2. [Puntuación máxima: 16]

En el equipo de admisiones de una nueva universidad están tratando de predecir el número de solicitudes de alumnos que recibirán cada año.

Sea n el número de años que lleva funcionando la universidad. El equipo de admisiones obtiene los siguientes datos correspondientes a los dos primeros años.

Año (n)	Número de solicitudes recibidas el año n
1	12 300
2	12 669

- (a) Calcule el aumento porcentual de las solicitudes entre el primer año y el segundo. [2]

Se supone que el número de alumnos que solicitan plaza en esta universidad cada año sigue una progresión geométrica u_n .

- (b) (i) Escriba la razón común de la progresión.
 (ii) Halle una expresión para u_n .
 (iii) Halle el número de solicitudes de alumnos que la universidad espera recibir cuando $n = 11$. Exprese la respuesta redondeando al número entero más próximo. [4]

El primer año, esta universidad tenía 10 380 plazas disponibles para solicitantes. El equipo de admisiones anunció que, cada año, aumentaría en 600 el número de plazas disponibles.

Sea v_n el número de plazas que hay disponibles en esta universidad el año n .

- (c) Escriba una expresión para v_n . [2]

Durante los 10 primeros años de funcionamiento de la universidad, se han cubierto todas las plazas. Los alumnos que consiguen plaza pagan USD 80 cada uno en concepto de cuota de admisión.

- (d) Calcule la cantidad total que se ha pagado a la universidad en concepto de cuotas de admisión durante los 10 primeros años. [3]

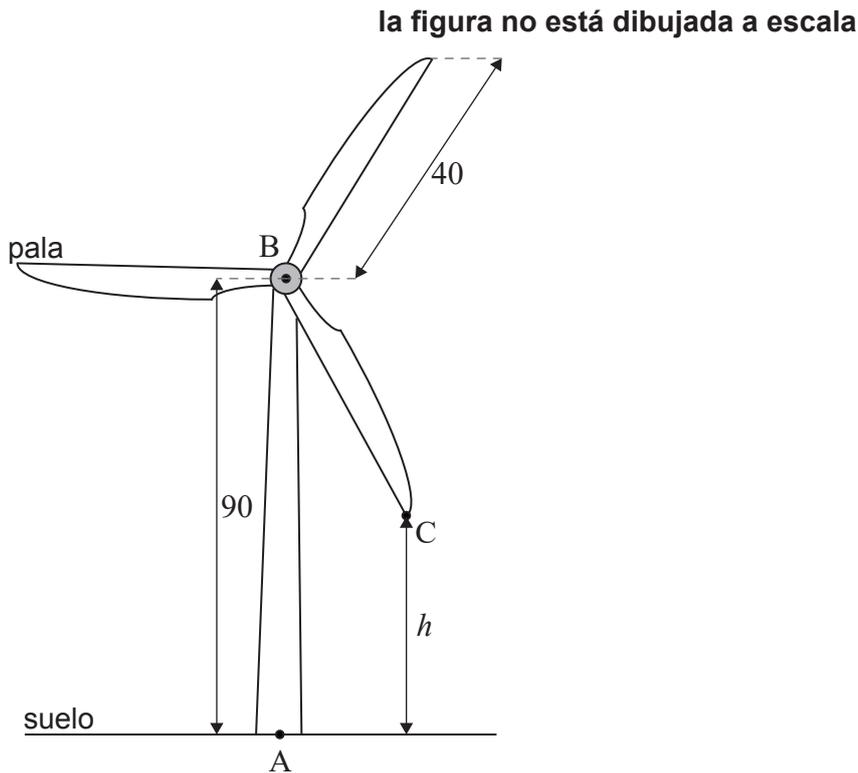
Cuando $n = k$, el número de plazas disponibles superará, por vez primera, el número de alumnos que solicitan plaza.

- (e) Halle k . [3]
 (f) Indique si, para todo $n > k$, la universidad tendrá plazas disponibles para todos los solicitantes. Justifique su respuesta. [2]

3. [Puntuación máxima: 20]

Una turbina eólica se ha diseñado de modo que genere energía eléctrica con la rotación de las palas. La turbina está instalada en un terreno horizontal y está compuesta por una torre vertical y tres palas.

El punto A se encuentra en la base de la torre y justo debajo del punto B, que está en la parte superior de la torre. La altura de la torre (AB) es igual a 90 m. Las palas de la turbina coinciden en B y cada una de ellas tiene una longitud de 40 m. Toda esta información se representa en la siguiente figura.



El extremo de una de las palas de la turbina se representa mediante el punto C en la figura. Sea h la altura (medida en metros) de C con respecto al suelo, donde h varía a medida que la pala va rotando.

(a) Halle:

(i) El valor máximo de h

(ii) El valor mínimo de h

[2]

En condiciones normales, las palas de la turbina realizan 12 rotaciones completas por minuto, moviéndose a velocidad constante.

(b) (i) Halle el tiempo (en segundos) que tarda la pala [BC] en realizar una rotación completa en estas condiciones.

(ii) Calcule el ángulo (en grados) que rota la pala [BC] en un segundo.

[3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

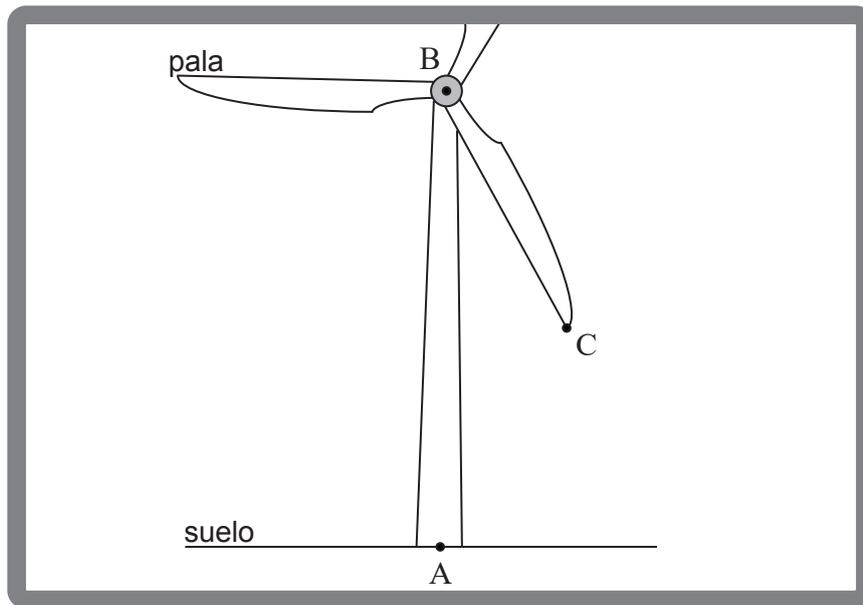
(Pregunta 3: continuación)

La altura (h) del punto C se puede modelizar mediante la siguiente función. El tiempo t (dado en segundos) se mide desde el instante en el que la pala [BC] pasa por primera vez por [AB].

$$h(t) = 90 - 40 \cos(72t^\circ), t \geq 0.$$

- (c) (i) Escriba la amplitud de la función.
- (ii) Halle el período de la función. [2]
- (d) Dibuje aproximadamente la función $h(t)$ para $0 \leq t \leq 5$, rotulando claramente las coordenadas de los máximos y de los mínimos. [3]
- (e) (i) Halle la altura de C con respecto al suelo cuando $t = 2$.
- (ii) Halle el tiempo (en segundos) que pasa el punto C a una altura de más de 100 m en cada rotación completa. [5]

Cuando mira por su ventana, Tim tiene una visión parcial de la turbina eólica giratoria. La posición de la ventana es tal que Tim no puede ver ninguna zona de la turbina eólica que esté a **más de 100 m** del suelo. Esta información se representa en la siguiente figura.

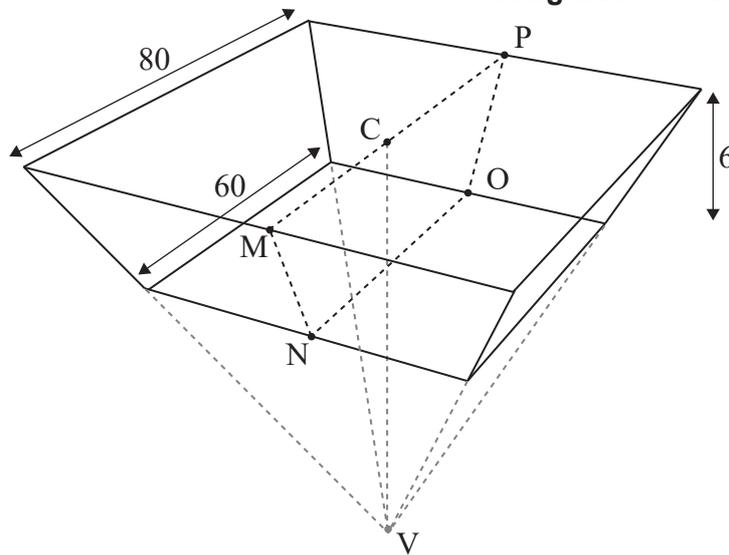


- (f) (i) En un instante cualquiera, halle la probabilidad de que el punto C sea visible desde la ventana de Tim.
- La velocidad del viento aumenta. Las palas rotan al doble de velocidad, pero siguen yendo a un ritmo constante.
- (ii) En un instante cualquiera, halle la probabilidad de que Tim pueda ver el punto C desde su ventana. Justifique su respuesta. [5]

4. [Puntuación máxima: 14]

Un depósito de agua de gran tamaño tiene la forma de un trozo de pirámide recta invertida, cuya base cuadrada horizontal mide 80 metros de lado. El punto C es el centro de la base cuadrada y el punto V es el vértice de la pirámide.

la figura no está dibujada a escala



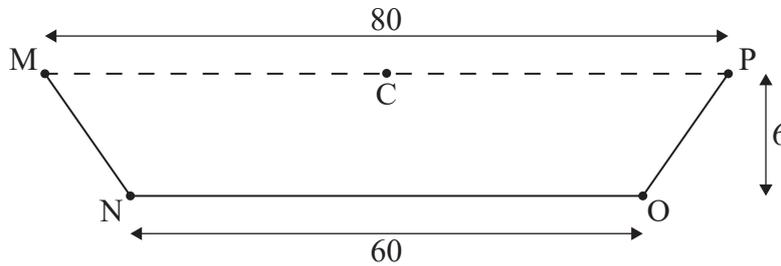
La parte inferior del depósito es un cuadrado de 60 metros de lado que es paralelo a la base de la pirámide, de modo que la profundidad del depósito es igual a 6 metros, como se muestra en la figura.

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 4: continuación)

La segunda figura muestra una sección transversal vertical (MNOPC) del depósito.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle el ángulo de depresión desde M hasta N. [2]

(b) (i) Halle CV.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, muestre que el volumen del depósito es igual a $29\,600\text{ m}^3$. [5]

Cada día se utilizan 80 m^3 de agua del depósito para regar.

Joshua afirma que, si no hay más agua que entre al depósito o que salga de él, cuando el depósito está lleno hay suficiente agua para regar durante al menos un año.

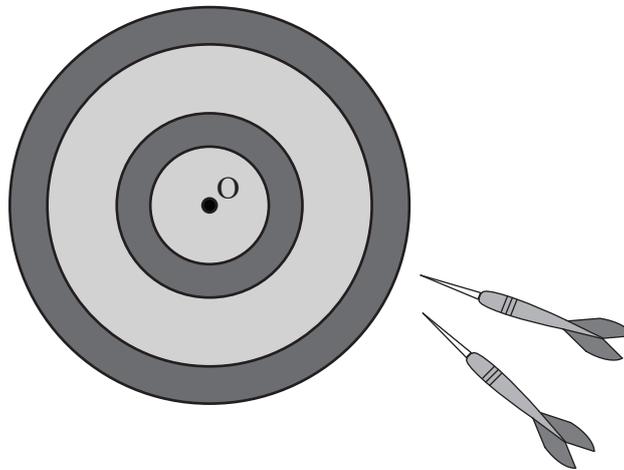
(c) Hallando un valor que resulte apropiado, determine si Joshua tiene razón. [2]

Para evitar que haya fugas de agua, se han pintado las cinco caras interiores del depósito con un material impermeable.

(d) Halle el área que se ha pintado. [5]

5. [Puntuación máxima: 14]

Arianne juega una partida de dardos.



La distancia entre el lugar donde se clavan los dardos de Arianne y el centro (O) de la diana sigue una distribución normal de media 10 cm y desviación típica igual a 3 cm.

(a) Halle la probabilidad de que Arianne:

(i) Clave un dardo a menos de 13 cm de O.

(ii) Clave un dardo a más de 15 cm de O.

[3]

Cada uno de los lanzamientos de Arianne es independiente de sus lanzamientos anteriores.

(b) Halle la probabilidad de que Arianne clave dos dardos consecutivos a más de 15 cm de O.

[2]

En una partida, cada jugador lanza tres dardos en cada turno. El jugador consigue un punto si clava **todos** los dardos (los tres) dentro de la zona central que hay alrededor de O. Cuando Arianne lanza un dardo, la probabilidad de que lo clave dentro de esta zona es igual a 0,8143.

(c) Halle la probabilidad de que Arianne **no** consiga un punto en uno de esos turnos donde lanza tres dardos.

[2]

En la partida Arianne tiene diez turnos, cada uno con tres dardos.

(d) (i) Halle la probabilidad de que Arianne obtenga al menos 5 puntos en esta partida.

(ii) Halle la probabilidad de que Arianne obtenga al menos 5 puntos y menos de 8 puntos.

(iii) Sabiendo que Arianne obtiene al menos 5 puntos, halle la probabilidad de que Arianne obtenga menos de 8 puntos.

[7]

Fuentes: